

CALCUL DE LA DIMENSION FRACTALE DES GRAINS DU MATERIAU GRÈS À L'ESSAI ŒDOMÉTRIQUE

MELBOUCI BACHIR¹ ET ACHIR MOURAD¹

¹Laboratoire Géo-Matériaux Environnement et Aménagement, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

RÉSUMÉ

La dimension fractale est la clé de la compréhension du comportement des matériaux granulaires : elle apporte une vision plus claire sur l'influence de l'irrégularité des grains sur leur comportement mécanique. Cette étude repose, dans un premier temps, sur la réalisation d'une série d'essais œdométriques et dans un deuxième temps sur la mise en évidence de la notion d'écrasement des grains engendrant une évolution de la fraction fractale en fonction de l'intensité des contraintes. Cette évolution donne naissance à une nouvelle structure granulaire avec de nouvelles caractéristiques géotechniques. L'influence de cette dimension fractale sur les propriétés des milieux granulaires est prise en considération pour une meilleure compréhension du comportement des granulats.

Mots clés : grès, grains, essai œdométrique, dimension fractale, comportement.

1. INTRODUCTION

La géométrie fractale est une description mathématique des formes naturelles. Un objet fractal est trop complexe pour être décrit dans un espace cartésien qui ne peut être représenté que par des lignes droites, des cercles et des cubes. Seule la dimension fractale est à même de mesurer un objet complexe et elle caractérise son degré d'irrégularité et la manière dont il remplit l'espace. Cette dimension fractale est généralement non entière.

Dans le cas des sols, le matériau granulaire est composé d'un ensemble de grains avec une variété de leur forme et de leur dimension. Il est représenté par un ensemble d'objets géométriques individualisés, des éléments solides et des pores formant un assemblage hiérarchisé et déformable. De façon générale, il apparaît qu'un certain nombre de grandeurs physiques mesurées sur le sol varient en loi de puissance avec l'échelle de mesure. Cette constatation peut vraisemblablement traduire le caractère fractal de certaines structures de ces matériaux. La dimension fractale qui est déduite de l'exposant de ces lois de puissance est alors une caractéristique de l'organisation structurale du sol ou de ce matériau granulaire. En outre, Perfect et Kay (1991) [1], dans leur étude sur la perméabilité des sols, concluent que la théorie fractale peut être utilisée pour caractériser des distributions de tailles d'agrégats.

Dans notre article, l'intérêt de la dimension fractale est ici de pouvoir analyser la complexité d'une texture d'un matériau granulaire (granulats de grès). Elle caractérise le comportement auto-similaire de la surface du grain ou de l'échantillon. C'est un nombre qui permet de quantifier le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un grain ou d'un ensemble de grain [2]. La dimension fractale est aussi une mesure de la façon dont la forme fractale occupe l'espace. Au cours de cette étude, l'accent a été particulièrement mis sur le calcul des dimensions fractales définies par les différentes méthodes (box counting et des masses), pour le matériau grès appartenant à la classe granulaires (0/10).

2-METHODE D'EVALUATION DE LA DIMENSION FRACTALE

La dimension fractale est l'une des caractéristiques principales de la géométrie fractale. Son calcul est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu. Elle a été utilisée, entre autres, dans le domaine du génie civil. Elle décrit bien l'irrégularité d'un grain du matériau granulaire pour lequel sa dimension est déterminée en associant sa forme à celle d'une sphère équivalente. Elle est alors mesurée selon un diamètre équivalent, ce qui ne suffit pas pour décrire le comportement d'un matériau. C'est dans ce but que plusieurs méthodes ont été développées pour calculer la dimension fractale d'un matériau granulaire.

La méthode la plus commode qui lie la dimension fractale à l'écrasement est la méthode des masses, qui prend en compte la distribution granulaire et la masse des grains de chaque diamètre. Les méthodes utilisées pour le calcul de la dimension fractale sont :

- Méthode de comptage des boîtes (Box counting) ;
- Méthode du diviseur ;
- Méthode de la ligne parallèle ;
- Méthode de surface-périmètre ;
- Méthodes des masses.

Dans cet article, nous avons retenu les deux méthodes suivantes : méthode de comptage des boîtes qui détermine la dimension fractale à l'échelle du grain et la méthode des masses qui la détermine à l'échelle d'un ensemble de grains ou de l'échantillon. Les méthodes du diviseur, de la ligne parallèle et de surface-périmètre n'ont pas fait l'objet de cette étude.

2-1-Méthode de comptage des boîtes (Box Counting)

La méthode de comptage des boîtes est une méthode qui consiste à diviser l'image d'un grain en petit carré et de dimension identique (faire un maillage), ainsi le contour du grain qui passe par ces boîtes est compté, et on refait la même opération avec des boîtes de tailles décroissantes.

Cette méthode est basée sur le principe que l'image du grain va correspondre au nombre de boîtes en fonction de leurs tailles. Cette relation est représentée par la formule suivante :

$$N(X>x) = kx^{-D_F} \quad (1)$$

x : dimension des boîtes $N(X>x)$: nombre de boîtes

k : constante

D_F : dimension fractale [3, 4]

En traçant ces valeurs: taille des boîtes en fonction du nombre de boîtes dans un graphe logarithmique, la dimension fractale est obtenue suivant la pente la mieux adaptée à la ligne et peut être calculée par l'équation suivante :

$$D_F = -m \quad (2)$$

m : pente de la droite la mieux adaptée.

Le calcul de la dimension fractale du contour du grain se fait comme suit : après prise de photo et traitement d'image, on délimite le contour du grain et on lui applique le maillage par des carrés de dimension identique prédéterminés (figure1). Le nombre de ces carrés (boîtes) sont tracées en fonction de leurs tailles (dimension des boîtes) sur un graphe logarithmique (figure 2). La dimension fractale calculée est une dimension de rugosité, la surface intérieure

du grain n'est pas prise en considération. Ce processus est répété pour chaque grain.

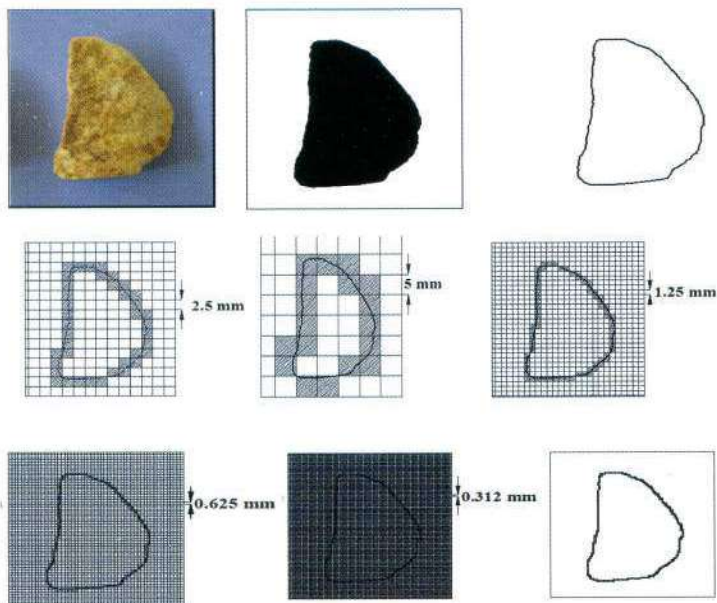


Figure 1 : Différentes étapes de maillage de l'image du grain, illustration de la méthode de Box Counting

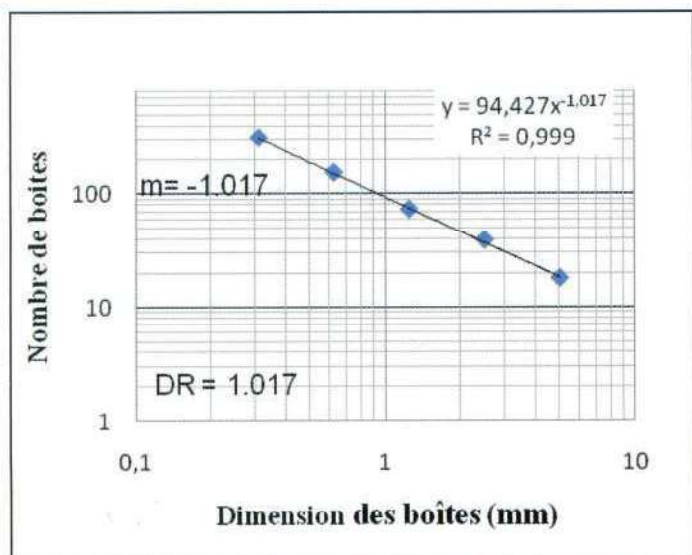


Figure 2 : Représentation graphique de la méthode de comptage des boîtes et détermination de la dimension fractale.

La méthode de comptage des boîtes (Box Counting) avec prise en compte de la surface intérieure du grain se fait comme suit : on refait les mêmes opérations (maillage de l'image), que ci dessus, mais avec prise en compte du nombre de boîtes se trouvant à l'intérieur de la surface du grain (figure 3).

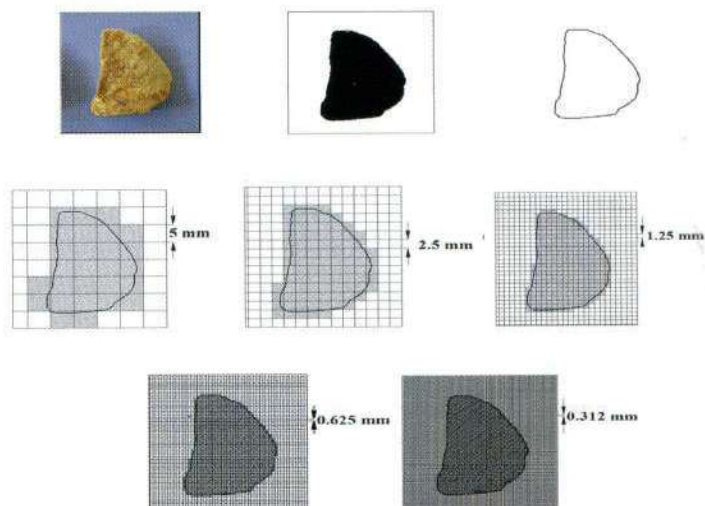


Figure 3 : Différentes étapes de maillage de l'image du grain avec prise en compte de la surface intérieure du grain (illustration de la méthode de Box Counting surfacique).

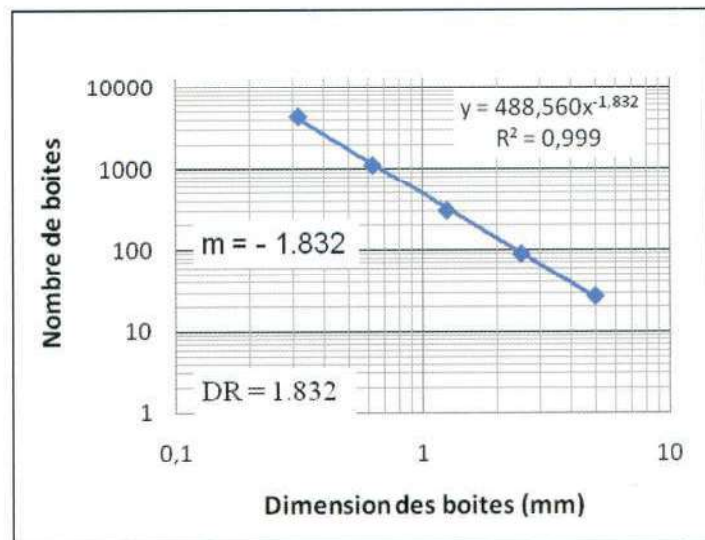


Figure 4 : Représentation graphique de la méthode de comptage des boîtes surfaciques et détermination de la dimension fractale.

2-2-Méthodes des masses

La définition classique de la dimension fractale des masses est déduite de la masse de l'agrégat M, et de sa taille L telle que définie par :

$$M \propto L^{Df} \tag{3}$$

M : masse de l'agrégat

L : taille d'un agrégat correspondant au rayon de giration et au diamètre maximal.

α : symbole de proportionnalité.

Cette méthode est basée sur la distribution des grandeurs des grains d'un échantillon de matériau de granulométrie bien définie. Tyler et Wheatcraft (1992) [5] ont développé une formule en utilisant l'analyse granulométrique pour le calcul de la dimension fractale de fragmentation DFR.

Celle-ci emploie la masse retenue en passoire de chaque diamètre. Elle est définie comme suit:

$$\frac{M(R < r)}{M_T} = \left(\frac{r}{r_L} \right)^{3-DF_R} \quad (04)$$

où $M(R < r)$: masse cumulative des grains avec la taille R plus petite qu'un comparatif donné de classe r ;

M_T : masse totale des grains ;

r : taille de l'ouverture des passoires;

r_L : dimension des gros grains définie par la plus grande ouverture de la taille des passoires ;

DF_R : dimension fractale de fragmentation.

La dimension fractale est calculée en utilisant l'équation suivante :

$$DF_R = 3 - m \quad (05)$$

avec : m la pente de la droite la mieux adaptée.

La méthode de comptage des boîtes (box counting) permet de déterminer la dimension fractale pour chaque grain, à la différence de la méthode des masses qui donne DFR pour un échantillon de grains. En effet, elle est calculée en utilisant l'analyse granulométrique d'un échantillon de sol. L'avantage de cette méthode est que l'on puisse utiliser les données de la courbe granulométrique. L'avantage de cette méthode est que DFR tient compte de plus de points dans la courbe granulométrique que les autres méthodes. En conséquence, la valeur de DFR déterminée peut représenter une distribution de grandeurs plus précises.

3-MATERIAU DE L'ETUDE

La région de Tizi-Ouzou dispose de plusieurs gisements des matériaux grès, situés en surface et près des routes nationales, ce qui rend leur exploitation facile et à moindre coût.

3-1-Définition des grès

Les grès sont des roches d'origine sédimentaire constituées essentiellement de silice, matière première indispensable et sans substitut pour de nombreuses industries. Les grès sont des sables cimentés dans lesquels la taille des grains est inférieure à 2 mm. Ils sont caractérisés par la dimension des grains, leur forme, leur grano-classement et la nature du ciment qui est en général de la silice ou du calcaire, parfois de l'argile ou des hydroxydes de fer et des éléments accessoires. Ce qui nous permet de distinguer : des grès siliceux, des grès calcaires, des grès argileux et des grès ferrugineux. Les grès utilisés dans cette étude sont d'origine miocènes silico-argileux dont la composition chimique est : 56 à 76% de SiO_2 , 9 à 14% de Al_2O_3 , 12 à 15% de CaO et de 1 à 3% de Fe_2O_3 .

Dans le cadre de nos essais, la taille et la forme du grain du grès (anguleuse, arrondie ou autres...) joue un rôle très important pour définir la dimension fractale. En effet, plus la forme d'un grain est rugueuse plus sa dimension fractale est importante.

4-ESSAIS REALISES

Une série d'essais œdométriques ont été menés au laboratoire LGEA de l'UMMTO. Ils ont pour but de suivre l'évolution du phénomène d'écrasement des grains et d'étudier le comportement mécanique de ces matériaux aux différentes sollicitations.

L'essai œdométrique est un essai simple qui permet d'évaluer l'amplitude des tassements des ouvrages ainsi que leurs évolutions dans le temps en caractérisant l'évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte verticale. Cet essai est assez peu utilisé dans la pratique pour les sols pulvérulents. Il est utilisé essentiellement pour étudier l'écrasement des grains. Pour tenir compte de la grosseur des grains, nous avons utilisé les œdomètres à cellules cylindriques indéformables de grande dimension 100 x 30 mm.

Pour mettre en évidence l'évolution du contour des grains, on a coloré dix grains de chaque dimension étudiée. Les échantillons sont soumis, ensuite, à des contraintes verticales à l'aide d'un piston relié à un dispositif de chargement. On comprime verticalement l'échantillon en mesurant leur tassement produit par le phénomène d'écrasement.

5-PRESENTATION ET INTERPRETATION DES RESULTATS

Ces essais ont permis d'étudier l'évolution de l'écrasement des grains en fonction de l'intensité de la sollicitation et de déduire l'évolution de la dimension fractale des grains de ces matériaux en fonction des paramètres quantifiant ce phénomène.

Le calcul de la dimension fractale des grains nécessite la détermination de la forme de rugosité physique des grains et cela en utilisant un appareil photo numérique pour la prise de photos (avant et après écrasement), le logiciel Adop Photoshop pour numériser les images (traitement d'image) des grains et le logiciel Autocad 2006 pour les différents calculs de dimension fractale (méthode Box Counting). Pour la méthode des masses, le calcul est fait en fonction des courbes granulométriques avant et après essais.

Dans chaque échantillon, les grains colorés ont permis une meilleure analyse de leurs contours après essais. Des photos témoins ont été prises pour mieux mettre en évidence le phénomène d'écrasement des grains (figure 5) et faciliter l'étude de l'évolution de la dimension fractale avant et après essais.



Figure 5 : Grain de grès avant et après écrasement à l'essai œdométrique.

Les résultats pour la méthode box counting portant sur le matériau grès sont présentés sur les figures (6 et 7) qui varient linéairement. Elles présentent des pentes différentes qui varient selon la granulométrie, la taille des grains et leur forme, qui engendrent une variation de degrés d'écrasement et donc une variation de la dimension fractale.

5-1-Courbes granulométriques

La classe granulaire utilisée est 0/10. Avant essais, les courbes granulométriques initiales sont serrées. Après essais, les courbes granulométriques ont la même allure, mais elles sont plus étalées que les courbes initiales. Des particules fines inférieures à 3(mm) ont été produites et elles sont d'autant plus élevées que la contrainte normale appliquée est plus importante. Ceci peut s'expliquer soit par le réarrangement des grains qui entraîne une diminution de l'indice des vides ou par la fragmentation des grains eux-mêmes sous l'action des forces s'exerçant aux points de contact.

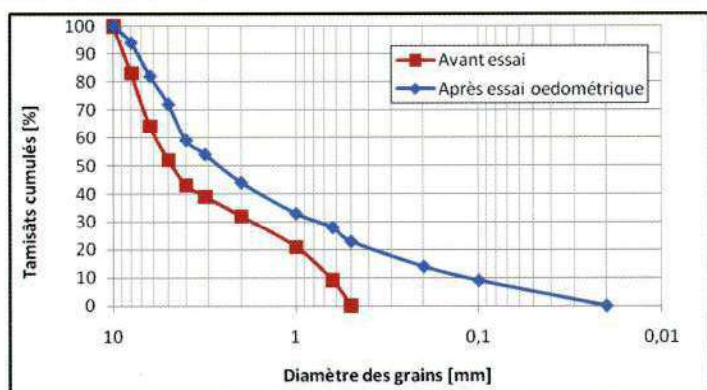


Figure 6 : Etallement granulométrique de la classe (0/10) après l'essai œdométrique.

5-2-Conséquence de l'écrasement des grains

Les grains sont plus serrés sous les fortes contraintes normales œdométriques et sont ainsi plus exposés à un écrasement qu'au déplacement. Ce qui nous amène à dire qu'il s'est produit un écrasement ou une fragmentation de grains.

On peut se référer au mode de rupture de Guyot et Troadec (1994) [6] qui sont essentiellement dans notre cas des ruptures des angularités et des écaillages qui provoquent l'augmentation de la rugosité des grains. Cette rupture entraîne une diminution de la taille des grains qui induit une augmentation du pourcentage de particule fines [7] et par conséquent à une modification de la forme et de l'état de surface des grains donc de la dimension fractale.

5-3-Evolution de la dimension fractale

5-3-1- Détermination de la dimension fractale par la méthode des boîtes (box counting)

La dimension fractale obtenue avec la méthode des boîtes (Box Counting) (rugosité) pour les différents grains de grès donnent des résultats très rapprochés pour un même échantillon. Cette dimension fractale est appelée dimension fractale de rugosité. Les résultats obtenus par cette méthode montrent que la dimension fractale calculée varie entre 1.017 à 1.075 avant écrasement et de 1.036 à 1.13 après écrasement pour le grès. Il y a donc une augmentation de la dimension fractale après écrasement, d'où une plus grande rugosité des grains. Donc, plus la forme d'un grain est rugueuse plus la dimension fractale augmente.

Pour la méthode de box counting surfacique, la dimension fractale varie selon la forme du grain, allant de 1.75 jusqu'à 1.87 avant écrasement, et de 1.651 à 1.81 après écrasement pour le grès. Dans tous les cas étudiés, la dimension fractale surfacique se rapproche de 2.

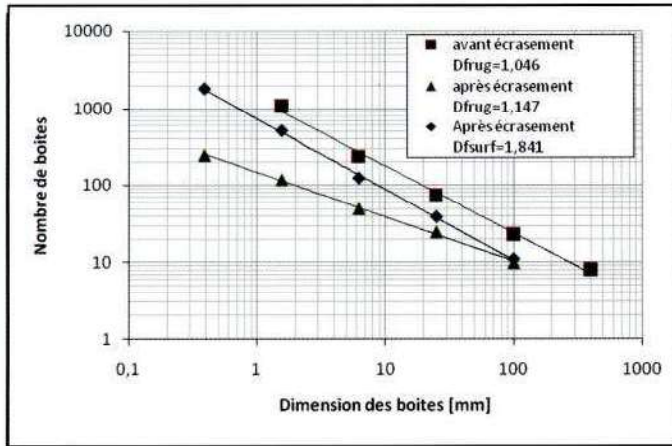


Figure 7 : dimension fractale de rugosité DR et surfacique calculée par la méthode de box counting de l'échantillon N°1 de grès avant et après écrasement à l'essai œdométrique.

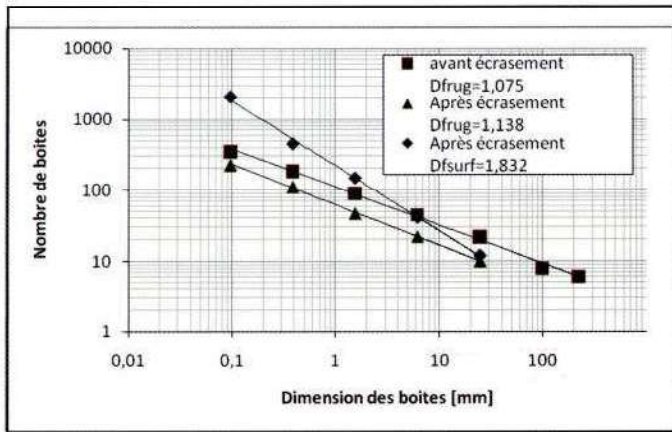


Figure 8 : dimension fractale de rugosité DR et surfacique calculée par la méthode de box counting de l'échantillon N°2 de grès avant et après écrasement à l'essai œdométrique.

La forme du grain joue un rôle très important pour la détermination de la dimension fractale. En effet, la forme allongée avant écrasement du grès (grain 3), présente une dimension fractale qui avoisine 1,75 ; alors que la forme presque carrée telle que celle du grès (grain 4) se rapproche de 1,9. La forme circulaire est la forme où la dimension fractale avoisine 2 telle que celle du grès (échantillon 1). Après écrasement, la forme des grains change, leur dimension fractale varie selon la forme obtenue, telle que celle des grains de grès (grain 3). Le grain de grès (échantillon 1) qui était presque circulaire devient presque carré après écrasement (tableau 1).

5-3-2- Détermination de la dimension fractale par la méthode des masses

Le calcul de la dimension fractale pour le matériau grès par la méthode des masses se fait à partir des courbes granulométriques de ce matériau. Cette dimension est appelée dimension fractale de fragmentation DFR. Les résultats obtenus sur les échantillons de grès sont portés sur les figures 8 et 9.

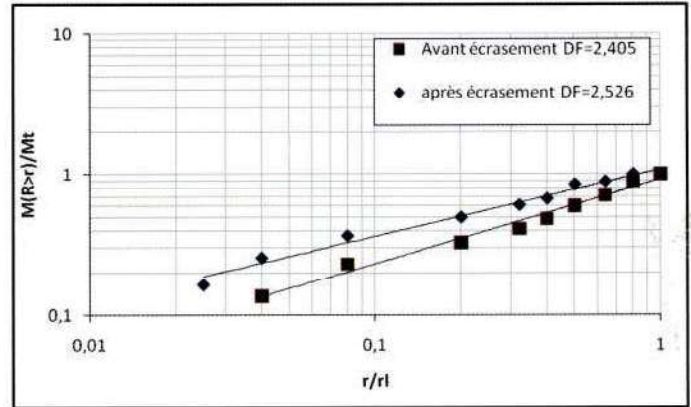


Figure 9: dimension fractale de fragmentation calculée par la méthode des masses de l'échantillon N°1 de grès avant et après écrasement à l'essai œdométrique.

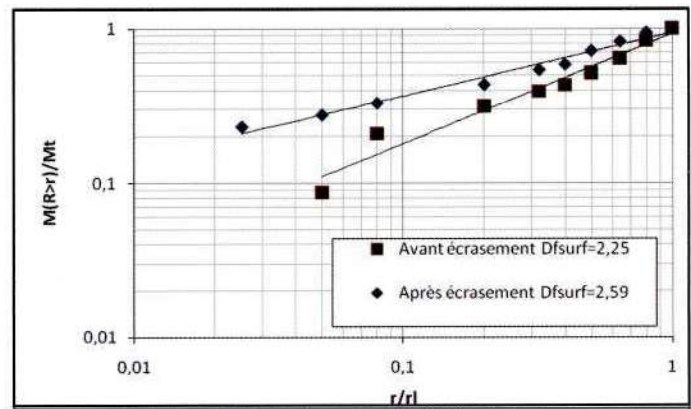










Figure 10: dimension fractale de fragmentation calculée par la méthode des masses de l'échantillon N°2 de grès avant et après écrasement à l'essai œdométrique.

Cette dimension fractale augmente considérablement de 2,20 à 2,59. Ces valeurs élevées indiquent que les échantillons sont fractals et avec une plus grande quantité de particules fines. Une caractéristique remarquable de la dimension fractale est que DFR augmente toujours après l'essai. D'après Turcotte (1986) [8], une dimension fractale qui atteint la valeur de 2,5 nous amène à dire que l'écrasement est pur et plus l'écrasement est important plus la dimension fractale tend vers 3.

5-3-3- Synthèse des résultats

Pour chaque échantillon, le calcul de la dimension fractale a été réalisé pour trois ou quatre grains. L'ensemble des résultats ont été regroupés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Récapitulatif des résultats de la dimension fractale obtenus sur les grains de grès de l'échantillon 1.

Matériau	Dimension fractale							
	Avant essai				Après essai			
	Formes	Box Count. Rugosité	Box Count. Surfaccique	Méthode Masses	Formes	Box Count. Rugosité	Box Count. Surfaccique	Méthode Masses
grès		1.030	1.943	2.287		1.036	1.855	2,591
		1.017	1.832			1.048	1.777	
		1.075	1.777			1.138	1.832	
		1.036	1.878			1.050	1.809	

Les résultats obtenus de la dimension fractale de fragmentation calculée par la méthode des masses lors des essais œdométriques ont permis de conclure les points suivants :

- La dimension fractale de fragmentation (DF_R) dépend de la granulométrie choisie initialement. Si la granulométrie est serrée, DF_R sera très faible, et pour une granulométrie étalée la DF_R aura une valeur supérieure à 2. Généralement, lorsque la DF_R prend des valeurs inférieures à 2, on dit que le matériau n'est pas fractal car il n'a pas subi d'effort important pour pouvoir écraser les grains.
- Après écrasement, les valeurs de DF_R varient de 2.011 à 2.591 ; on remarque qu'elles sont supérieures à 2.
- D'après le tableau 1, on remarque que la dimension fractale de fragmentation augmente toujours après les essais et toutes les valeurs obtenues tendent vers 2.5 d'où l'étalement de la courbe granulométrique et donc présence de particules fines. On dit que le matériau est totalement fractal lorsque la DF_R est supérieur à 2.5 [8] et l'écrasement est d'autant plus important que la dimension fractale tend vers 3.

6-CONCLUSION

Le calcul de la dimension fractale par les différentes méthodes citées précédemment nous donne une vision générale sur le concept de la fractalité et son mode de calcul. En effet, la méthode des masses nous donne une idée générale sur la distribution de la grandeur des grains du sol et du procédé de fragmentation. La valeur élevée de cette dimension indique que l'échantillon est fractal ou a une plus grande quantité de particules fines. Par contre, la méthode de comptage des boîtes détermine la rugosité à l'échelle d'un grain et elle dépend surtout de l'échelle de mesure, de la façade choisie du grain pour la prise d'image et de la qualité de l'image (nombre de pixel).

Cette dimension fractale varie non seulement en fonction de la forme du grain mais aussi en fonction d'autres paramètres tels que la granulométrie, la masse de l'échantillon, la densité, l'intensité des contraintes et de la nature de la méthode utilisée.

Les résultats obtenus dépendent du mode de rupture que les grains subissent. En effet, la dimension fractale augmente dans le cas d'un « écaillage » qui provoque l'augmentation des irrégularités superficielles.

7-BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Perfect et B. D. Kay (1991) : Fractal theory applied to soil aggregation. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 55, 1991, pp.1552-1558.
- [2] B.B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, Free Man, New York, 1983.
- [3] GH Huang, W, H, Zhan, Fractal property of soil particle size distribution and Its Application, *Acta Pedologica Sinica*, 39, 2002, pp.490-497.
- [4] X.. Wang, M-H. li, S. He, and G. He: Fractal Characteristics of soils under different land- use patterns in the arid and semiarid regions of the Tibetan Plateau, China, *Geoderma*, 134 (1- 2), 2006, pp. 56-61.
- [5] S. W., Tyler and S. W., Wheatcraft: Fractal scaling of soil particle size distributions: analysis and limitations. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 56, 1992, pp. 362 – 369.
- [6] E. Guyon et J.P. Troadec: *Du sac de billes au tas de sables*, Editions Odile Jacob, Sciences, 1994
- [7] P. V. Lade and J. A. Yamamuro: significance of particle crushing in granular materials. *Journal of Geotechnical Engineering – Vol. 122, N°4*, 1996, pp. 3109-3116.
- [8] D. L., Turcotte, *Fractals and fragmentation*. *Journal of Geophysical Research*, Vol 91, 1986, pp. 1921 – 1926.